Dieses Projekt beschäftigt sich mit Diophantischen Gleichungen mit besonderer Rücksicht auf Anwendungen in der Zahlentheorie. Insbesondere sind wir an zwei Hauptthemen (additive Einheitenstruktur von Ringen und arithmetischen Progressionen auf Kurven) und einem kleineren Thema (Diskrepanztheorie) interessiert.

Der erste Themenbereich umfasst das sogenannte Einheitensummenproblem für Zahlkörper, bei dem man alle Zahlkörper K charakterisieren will, für die die Maximalordnung von K von ihren Einheiten erzeugt wird. Diesem Problem wurde erst kürzlich Augenmerk durch die Untersuchungen von Ashrafi, Hajdu, Jarden, Narkiewicz und Vámos geschenkt. Darüber hinaus konnte der Antragsteller zusammen mit mehreren Ko-Autoren einige Fälle vollständig charakterisieren (rein kubischer, rein komplex quartischer und bi-quadratischer Fall). Neben dem klassischen Einheitensummenproblem sind wir auch an Variationen von diesem Problem interessiert, z.B. die Existenz von Potenzganzheitsbasen bestehend aus Einheiten, Ordnungen erzeugt aus Summen verschiedener Einheiten und auch an analytischen Aspekten. Um erfolgreich diese Probleme zu lösen, werden neben Methoden aus der Computeralgebra (Gröbnerbasen) auch Diophantische Gleichungen eine Schlüsselrolle spielen. Insbesondere Resultate über binäre Thue Gleichungen, simultanen Pell Gleichungen, Indexform Gleichungen und vielen anderen Typen von Diophantischen Gleichungen werden von großem Nutzen in diesem Projekt sein.

Der zweite große Themenbereich betrifft arithmetische Progressionen auf planaren, algebraischen Kruven. Es sei eine planare, algebraische Kurve gegeben durch die Gleichung f(x,y)=0, dann sagt man diese Kurve besitzt eine arithmetische Progression der Länge n, wenn es n rationale Punkte auf der Kurve gibt, sodass die x-Komponenten (oder die y-Komponenten) eine arithmetische Progression bilden. In diesem Projekt wollen wir hauptsächlich quadratische (Pell Gleichungen), elliptische und hyperelliptische Kurven untersuchen. Im Fall der elliptischen Kurven gehen diese Untersuchungen auf Mohanty zurück, der zeigen konnte, dass es keine 5 aufeinanderfolgende ganze Zahlen gibt, sodass diese die y-Komponenten einer elliptischen Kurve der Form $y^2=x^3+k$ mit einer ganzen Zahl $k>0$ bilden. Mohanty vermutet auch, dass es keine arithmetischen Progressionen der Länge 4 auf solchen Kurven gibt. Allgemein formuliert, ist es Ziel dieses Projektes die Zahlen m(d) beziehungsweise M(d) zu untersuchen. Dabei entsprechen m(d) und M(d) der größten Zahl n, sodass es ein bzw. unendlich viele Polynome g vom Grad d gibt mit der Eigenschaft, dass die Kurve $y^2=g(x)$ eine arithmetische Progression der Länge n enthält. Solche Fragen sind auch zum Problem der magischen Quadrat bestehend aus Quadraten eng verknüpft.

Eine weitere Anwendung Diophantischer Gleichungen wurde im Zusammenhang mit der Diskrepanztheorie gefunden. Einerseits konnte mit der Hilfe des Subspace Theorems von Schmidt gezeigt werden, dass bestimmte Niedrigdiskrepanzfolgen Ecken vermeiden, was unmittelbare Folgen für Quasi-Monte-Carlo-Methoden hat. Andererseits ist die Frage ob eine Teilfolge einer n-alpha-Folge ebenfalls eine Niedrigdiskrepanzfolge ist, eng mit der Anzahl der Lösungen von bestimmten S-Einheiten Gleichungen verknüpft. In diesem Projekt sollen auch diese Aspekte untersucht werden.